L3 SM UE604P **Université de Tours** **Année 2008-2009**

Méthodes mathématiques pour la physique

15/05/2009 **durée de l'examen: 2h**

1. On considère une particule chargée en 2D dans un champ magnétique uniforme orthogonal B. Ce système est décrit par l'hamiltonien

$$\hat{H} = -\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + iB\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{B^2 \rho^2}{4} \right\}.$$

   - Montrer que $\hat{H}$ commute avec l'opérateur du moment angulaire $\hat{L}_z = -i\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$.
   - Montrer que l'équation de Schroedinger radiale s'écrit comme

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} - \frac{B^2\rho^2}{4} - B\nu + E \right) \psi_\nu(\rho) = 0, \qquad (1)$$

   où ν et E notent respectivement la valeur propre de $\hat{L}_z$ et l'énergie.
   - Décrire les comportements asymptotiques possibles des solutions de (1) lorsque $\rho \to 0$.
   - Décrire les comportements asymptotiques possibles des solutions de (1) lorsque $\rho \to +\infty$.

2. On s'intéresse aux fonctions propres communes des opérateurs $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ avec la valeur propre de $\hat{L}^2$ égale à 2.
   - Quelles sont les valeurs propres possibles de $\hat{L}_z$?
   - Donner la forme explicite de toutes ces fonctions.

3. Soient $\hat{z}$ et $\hat{\partial}$ deux opérateurs qui agissent sur les fonctions d'une variable z de la façon suivante:

$$(\hat{\partial} f)(z) = \frac{df}{dz}(z), \qquad (\hat{z} f)(z) = z f(z).$$

   Montrer (par exemple, par induction) que $\left[\hat{\partial}^{k+1}, \hat{z}\right] = (k+1)\,\hat{\partial}^k$.